Η διδασκαλία μαθηματικών εννοιών με παραδείγματα και αντιπαραδείγματα

Γιάννης Π. Πλατάρος ΜΠΕ Διδακτικής & Μεθοδολογίας των Μαθηματικών
plataros@gmail.com

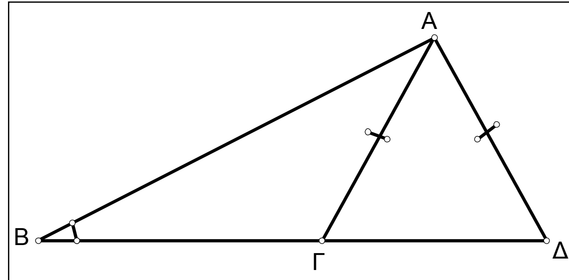
Περίληψη: Τα παραδείγματα και τα αντιπαραδείγματα κατέχουν κεντρικό ρόλο στην διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών, καθώς μπορούν να τις καλύψουν διδακτικώς πλήρως. Παραλλήλως, η χρήση επίλεκτων παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, μπορεί να ελαττώσει σημαντικό μέρος της ισχύος σε συγκεκριμένα διδακτικά εμπόδια που παρουσιάζονται κατά την διδασκαλία , ενώ η πληρότητα κάλυψης των εννοιών, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως κριτήριο αξιολόγησης των αντιστοίχων διδακτικών εγχειριδίων.

Εισαγωγή: Όλοι συμφωνούν, ότι η διδασκαλία , θα πρέπει να επιτελείται με τα «κατάλληλα» διδακτικά παραδείγματα Η επιλογή τους επαφίεται στην εμπειρία του διδάσκοντος και των βιβλίων που έχει υπ΄ όψιν του. Μια συνέπεια αυτής της υποκειμενικότητας , είναι ότι ορισμένες έννοιες δεν καλύπτονται σε ολόκληρο το πλάτος και το βάθος τους με τα παραδείγματα που διδάσκονται. Έτσι έχουμε δυσμενή μαθησιακά αποτελέσματα στους μαθητές. Στην παρούσα εργασία, θα προσπαθήσουμε να αντικειμενοποιήσουμε και να περιγράψουμε σαφέστερα τα όρια των «καταλλήλων» παραδειγμάτων για κάποιες μαθηματικές έννοιες.

Οι έννοιες και τα παραδείγματα: Κάθε μαθηματική έννοια χωρίζει τα μαθηματικά αντικείμενα στα οποία αναφέρεται σε δύο κλάσεις: Στην κλάση των **παραδειγμάτων** (examples) που την πληρούν και στην κλάση των **αντιπαραδειγμάτων** (counterexamples ή non examples[1]) που δεν την πληρούν. Διδακτικά , η μη χρήση αντιπαραδειγμάτων στην διδασκαλία των μαθηματικών αφαιρεί από τον διδάσκοντα ένα μέρος της διδακτικής του ισχύος . Με αυτή την οπτική, φαίνεται παράξενο που η λέξη αντιπαράδειγμα απουσιάζει από πολλά διδακτικά βιβλία μαθηματικών καθώς αυτό αποτελεί «εργαλείο σε ετοιμότητα» του διδάσκοντα. λ.χ σε λανθασμένο ισχυρισμό του μαθητή , ιδίως όταν ο ισχυρισμός ανήκει στα συνήθη, αναμενόμενα, γνωστά λάθη των μαθητών. Όταν π.χ. ο μαθητής

[1] Ο όρος «non example» αναφέρεται συνήθως σε ορισμούς και ο όρος «counterexample» σε προτάσεις και θεωρήματα. Επειδή η μετάφραση ως «μη παράδειγμα» δεν στέκει καλώς στα Ελληνικά, θα μεταφέρουμε και τους δύο όρους ως «αντιπαράδειγμα»

ισχυρισθεί, ότι «δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία και από μια γωνία τους ίση» τότε θα πρέπει να είναι έτοιμος να σχεδιάσει το διπλανό σχήμα που αποτελεί το κλασικό αντιπαράδειγμα στον λανθασμένο ορισμό του μαθητή , όπου τα τριγ.ΑΒΓ και τριγ.ΑΒΔ πληρούν τις προϋποθέσεις του ισχυρισμού, αλλά όχι το συμπέρασμα.



Ακόμα και στις μικρές βαθμίδες , το αντιπαράδειγμα αποτελεί «ετοιμοπόλεμο εργαλείο» του διδάσκοντα , όταν λ.χ. ο μικρός Κωστάκης στην πρόσθεση κλασμάτων επιμένει να προσθέτει ή να αφαιρεί αριθμητές με αριθμητές και παρονομαστές με παρονομαστές. Πειστικά αντιπαράδειγμα δίνει η κλάση $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\alpha}{2\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$ ή $\frac{2\alpha}{2\beta}-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$ μέσα από την οποία ο διδάσκων μπορεί να παραθέσει το $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ όπου όλοι γνωρίζουν ότι κάνει 1 και όχι πάλι $\frac{1}{2}$ που δίνει ο υπολογισμός του Κωστάκη , ενώ για την αφαίρεση , όλοι επίσης ξέρουν ότι $\frac{2}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0 \; \text{και όχι} \; \frac{1}{2}$ που υπολογίζει ο Κωστάκης με τον λανθασμένο τρόπο του.

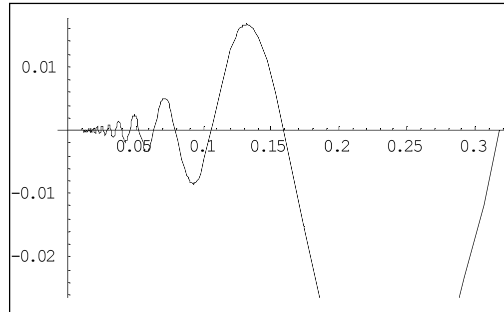
Γνωστικές συγκρούσεις μέσω αντιπαραδειγμάτων: Θεωρείται, ότι ο βασικότερος ρόλος ενός δασκάλου των μαθηματικών, είναι να δημιουργεί, να εφευρίσκει και να ανακαλύπτει καταστάσεις που να ευνοούν την «σύγκρουση γνώσεων» Παλαιότερες εδραίες και πρωταρχικές γνώσεις που θεωρούνται «κοινές» και συνήθως έχουν καθιερωθεί και με την βοήθεια των αισθήσεων, συγκρούονται με την νέα γνώση που παράγεται με σκέψη και συλλογισμό. Σε αυτή την διαδικασία το αντιπαράδειγμα κατέχει πρωταγωνιστικό ρόλο. Για παράδειγμα, οι μαθητές γνωρίζουν την πανάρχαια προφανή «κοινή έννοια» στον Ευκλείδη ότι «το όλον , μείζον του μέρους εστί» Έτσι, δεν έχουν κανένα πρόβλημα να παραδεχθούν ότι $x>\frac{1}{2}x$ για κάθε x . Οι ίδιοι μαθητές, παραλλήλως, γνωρίζουν πολύ καλά ότι -2>-4 . Εδώ το αντιπαράδειγμα που θα προκαλέσει την γνωστική

σύγκρουση, συνίσταται στην εξεύρεση λύσης στην ανίσωση $x < \frac{1}{2}x$, η οποία αληθεύει για κάθε αρνητικό αριθμό. Να επισημάνουμε όμως, ότι σύμφωνα με την γνώμη πολλών ερευνητών, μόνο η παράθεση του αντιπαραδείγματος δεν αρκεί για να προκαλέσει την γνωστική σύγκρουση , καθώς ο διδάσκων θα πρέπει να γνωρίζει καλώς τα λανθασμένα νοητικά μοντέλα που χρησιμοποιούν οι μαθητές, ώστε να σχεδιάσει τις αντίστοιχες δραστηριότητες γνωστικής ρήξης στο κατάλληλο πλαίσιο οι οποίες θα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν εντυπωσιακές, άλλως υπάρχει ο κίνδυνος το παλαιό μοντέλο να παραμείνει αμετακίνητο ή (ακόμα χειρότερα) τα παλαιό να συγκατοικήσει με το νέο.

Η πλήρης διδακτική κάλυψη μιας έννοιας, απαιτεί παράθεση **αντιπροσωπευτικών παραδειγμάτων**, δηλ. παραδειγμάτων που καλύπτουν την έννοια σε ολόκληρο το πλάτος και το βάθος της , όπως και σε όλες τις μορφές περιπτώσεων που μπορεί να θεωρηθεί , κατά το δυνατόν. Θα μπορούσε να ισχυρισθεί κάποιος, ότι μόνο τα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα καλύπτουν επαρκώς μια έννοια και δεν χρειάζονται τα αντιπαραδείγματα. Διδακτικώς όμως, πάρα πολλά πράγματα ξεκαθαρίζονται από την επισήμανση όχι μόνο από το τι είναι κάτι, αλλά και **από το τι δεν είναι**. Επομένως εξ ίσου αναγκαία είναι και η κάλυψη με αντιπαραδείγματα και μάλιστα από **«εφαπτόμενα αντιπαραδείγματα»** τα οποία θα μπορούσαμε να τα θεωρήσουμε ως τα παραδείγματα που δεν πληρούν τον ορισμό ή τις υποθέσεις της προτάσεως **παρά μία συνθήκη**. Αυτά, δείχνουν την συνεισφορά και την αναγκαιότητα κάθε συνθήκης στο κτίσιμο μιας έννοιας και έτσι τελικώς, με αντιπροσωπευτικά παραδείγματα και εφαπτόμενα αντιπαραδείγματα, **υπερκαλύπτουμε** διδακτικά κάθε έννοια ή πρόταση.

Μπορεί να γίνει πλήρως κατανοητή μια έννοια μόνο με τον ορισμό της και χωρίς παραδείγματα; Η εύκολη απάντηση στο ερώτημα είναι ότι τα παραδείγματα επιβάλλονται παιδαγωγικώς και επίσης ότι ορισμένα φωτισμένα μυαλά μπορούν να κατανοήσουν σπουδαία πράγματα με ελάχιστη ή και καθόλου εποπτεία. Για να δούμε τα όρια αυτής της άποψης, ας δώσουμε ένα παράδειγμα από τον Απειροστικό. Έστω η πρόταση: «Αν μία συνάρτηση f: [α,β] $\rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής , τότε στο α έχω τοπικό ακρότατο» Είναι αληθής; Ας δούμε πώς μπορεί να το προσεγγίσει διαισθητικά ένας μαθητής ή σπουδαστής σκεπτόμενος εποπτικά-γεωμετρικά: « Ξεκινώντας να σχεδιάζω την συνάρτηση από το σημείο (α,f(α)) και σε μια περιοχή του α «οσοδήποτε κοντά» , έχω τρεις δυνατές

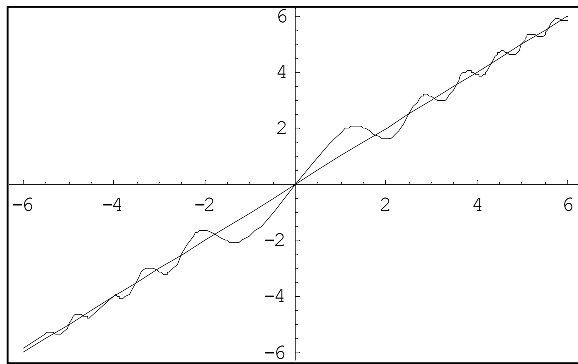
επιλογές: Ή να κατευθυνθώ προς τα πάνω (οπότε έχω τοπικό ελάχιστο) ή να προς τα κάτω (οπότε έχω τοπικό μέγιστο) ή να πάω οριζόντια, οπότε (με την ευρεία) έννοια έχω πάλι τοπικό ακρότατο. Επομένως στο α έχω πάντα τοπικό ακρότατο.» Όμως αυτή η σκέψη είναι λανθασμένη λόγω του αντιπαραδείγματος $f:[0,\frac{1}{\pi}]\to\mathbb{R}$ **με** $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0\end{cases}$ Φυσικά, ένας άνθρωπος, μπορεί να γνωρίζει άριστα την λεκτική διατύπωση του ορισμού της συνάρτησης , αλλά ων δέσμιος των περιορισμένων αντικειμένων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, δεν μπορεί να φανταστεί ότι «οσοδήποτε κοντά στο 0» μπορεί να έχω ταλάντωση με ετερόσημες τιμές και άρα το (0, f(0))δεν μπορεί ποτέ να είναι ακρότατο. Επίσης ισχύει, ότι σε οιοδήποτε υποδιάστημα , οσοδήποτε κοντά στο 0 η συνάρτηση δεν είναι γνησίως μονότονη. Επιστημολογικώς έχει συμβεί κάτι που ιστορικά είναι γνωστό: «Σε ό,τι έχει να κάνει με το άπειρο και το απειροστό, δεν πρέπει να εμπιστευόμαστε πολύ την φαντασία ή την διαίσθησή μας» Τα πρώτα νοητικά μοντέλα που αναπτύσσει ο εγκέφαλος για την συνάρτηση και τα οποία φυσικά προέρχονται από τα ίδια τα παραδείγματα συναρτήσεων, δεν συμπεριλαμβάνουν τις συναρτήσεις με άπειρο μήκος σε ένα κλειστό διάστημα ή με άπειρη ταλάντωση ή μη φραγμένης κυμάνσεως . Τέτοιες «παράξενες» συναρτήσεις δεν μπορεί να σχεδιάσει πλήρως ούτε ανθρώπινο χέρι ούτε Η/Υ. Οι λόγοι για τους οποίους όμως πρέπει να υπάρχουν κάποιες τέτοιες **(λίγες)** συναρτήσεις σε ένα διδακτικό εγχειρίδιο , έστω χωρίς την απαιτούμενη ανάπτυξη ή «αυστηρότητα» είναι νομίζω προφανείς.



Σχήμα 1.

Η έννοια της «ασύμπτωτης ευθείας σε συνάρτηση» και τα προβλήματά της: Η έννοια αυτή ετυμολογικώς παραπέμπει σε μια ευθεία που πλησιάζει στο άπειρο τη συνάρτηση, αλλά ποτέ δεν εφάπτεται σ΄ αυτή , πόσω δε μάλλον να την τέμνει. Ο σχετικός ορισμός δεν ξεκαθαρίζει τα πράγματα, καθώς η γεωμετρική μετάφραση – αναπαράσταση της έκφρασης « $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\mu)]=0$ » για πολλούς μαθητές είναι ότι «η ευθεία δεν εφάπτεται με την συνάρτηση ή –τελικά ,

οριακά- εφάπτεται στο άπειρο» Έτσι, είναι πιθανόν μια λανθασμένη αυθαίρετη γενίκευση στο μυαλό κάποιων μαθητών τη βοηθεία και της ιδίας της λέξης «ασύμπτωτη» να οδηγεί στην πεποίθηση της μη επαφής. Αυτό, μπορεί να προληφθεί με ένα παράδειγμα σαν το ακόλουθο: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{x}\sin x^2 & \alpha\nu\ x\neq 0 \\ 0 & \alpha\nu\ x=0 \end{cases}$, όπου η f είναι συνεχής παντού και επιδέχεται και στο $+\infty$ και στο $-\infty$ ως πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία y=x . Η ευθεία και η συνάρτηση έχουν άπειρα σημεία τομής σε κάθε υποδιάστημα ξεχωριστά $(-\infty, -M]$ και $[M, +\infty)$ για οσοδήποτε μεγάλο και θετικό Μ.



Οι διδακτικά σπουδαίες ιδιότητες της συνάρτησης του Dirichlet : Μπορεί ένα και μοναδικό παράδειγμα να καλύπτει πολλές έννοιες του απειροστικού; Η απάντηση είναι ότι αυτό είναι δυνατόν και αυτή είναι η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ -1 & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$. Ανήκει στην ομάδα των «παθολογικών συναρτήσεων» για τις οποίες ένοιωθε αποστροφή ο **Poincare** χωρίς όμως να υποψιάζεται την εμφάνισή τους μετά από χρόνια σε πολλούς τομείς του επιστητού. Αυτή, έχει πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες :

- Ιστορικά, όταν τέθηκε στην μαθηματική κοινότητα, στάθηκε αιτία της διεύρυνσης του ατελούς μέχρι τότε (1837) ορισμού της συνάρτησης σε έναν πιο τέλειο(ότι δηλ. είναι μια «αυθαίρετη» μονοσήμαντη αντιστοιχία) πριν φθάσει στον σύγχρονο ορισμό που έγινε από τον Hausdorff to 1914 με την χρήση της έννοιας του διατεταγμένου ζεύγους . Σύμφωνα με την αναλογική εφαρμογή στην Διδακτική του βιογενετικού νόμου ότι «Η **οντογένεση** επαναλαμβάνει συντόμως την **φυλογένεση**» ο μαθητής θα κατανοήσει καλύτερα την έννοια της συνάρτησης μέσω και της συγκεκριμένης (ή όποιας άλλης τύπου Dirichlet)

- Ήταν το πρώτο ιστορικό παράδειγμα συνάρτησης που ορίζετο χωρίς κάποια συγκεκριμένη αναλυτική έκφραση.
- Ήταν το πρώτο ιστορικό παράδειγμα συνάρτησης ασυνεχούς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της και σε κάθε περιορισμό του.
- Η f είναι ασυνεχής παντού, αλλά η |f| είναι συνεχής παντού.(Αντιπαράδειγμα στο αν ισχύει αντίστροφο σχετικής πρότασης)
- Αν $g(x) = -f(x)$ τότε και η g είναι ασυνεχής παντού, αλλά η

fg(x)=-1 είναι παντού συνεχής, όπως και η (*f*-*g*)(x)=0 είναι παντού συνεχής , όπως και η $\frac{f}{g}(x) = -1$ είναι συνεχής , όπως και η $(f \circ g)(x) = 1$, είναι επίσης συνεχής. (Ένα αντιπαράδειγμα για τέσσερις ισχυρισμούς ισχύος σχετικών αντίστροφων προτάσεων)

- Είναι περιοδική με περίοδο οιοδήποτε θετικό ρητό αριθμό. (Σύμφωνα με άλλο ορισμό της περιοδικής συνάρτησης, δεν είναι περιοδική διότι δεν έχει ελάχιστη θετική περίοδο.)
- Η f^2 είναι συνεχής, ενώ η f είναι ασυνεχής.(Επίσης αντιπαράδειγμα σε ισχυρισμό ισχύος σχετικής αντίστροφης πρότασης)
- Η f , χωρίς να είναι σταθερή, δεν είναι μονότονη συνάρτηση ,αλλά και δεν υπάρχει υποδιάστημα του R στο οποίο να είναι μονότονη.
- Η *f(x)* ορίζεται στο R ,ενώ σε κάθε υποδιάστημα του R, οσοδήποτε μικρό, περιέχονται άπειρες θέσεις ακροτάτων της f .
- Η *f(x)* /[α,β] είναι φραγμένη και δεν είναι ολοκληρώσιμη, όμως η |*f*| καθώς και η f^2 είναι ολοκληρώσιμες.(Αντιπαράδειγμα σε σχετικούς ισχυρισμούς ισχύος αντιστρόφων γνωστών προτάσεων)
- Αν $h(x) = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{αν} & x & \text{ρητός} \\ 0 & \text{αν} & x & \text{άρρητος} \end{matrix} \right\}$ δεν πληροί τις προϋποθέσεις

  του Θεωρήματος Bolzano «στον μέγιστο δυνατό βαθμό»(: = όχι συνεχής, όχι ετερόσημες τιμές , όχι ορισμένη σε κλειστό διάστημα) ενώ πληροί το συμπέρασμα επίσης «στον μέγιστο δυνατό βαθμό»(:=έχω όχι μία τουλάχιστον ρίζα, αλλά άπειρες και δη υπεραριθμήσιμες) , πράγμα που την καθιστά «ιδανικό παράδειγμα» για την μη ισχύ του αντιστρόφου του θεωρήματος. (Ικανές, αλλά όχι αναγκαίες συνθήκες)

Ο ρόλος των «συνήθων λαθών» σε σχέση με τα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα: Θεωρητικώς, οι δυνητικά λανθασμένες απαντήσεις σε συγκεκριμένες ερωτήσεις περί τα μαθηματικά, συνιστούν ένα σύνολο πολύ μεγάλου πληθικού αριθμού . Στη πραγματικότητα οι λανθασμένες απαντήσεις, είναι **εξαιρετικά περιορισμένες σε αριθμό** και μάλιστα **επαναλαμβάνονται επιμόνως** από πολλές γενιές μαθητών. Σχεδόν όλα αυτά τα «επίμονα λάθη» αποδίδονται σε διδακτικά (ή γνωστικά) εμπόδια δηλ. σε επιστημολογικά εμπόδια. Κατά γνώμη του γράφοντος, ορισμένα από αυτά έχουν υπερεκτιμηθεί ,αφού το εμφανιζόμενο ως καθαρό επιστημολογικό εμπόδιο είναι μόνο γλωσσικό και αίρεται με κατάλληλο παράδειγμα. Ήδη έχουμε επεξεργαστεί το θέμα της «ασύμπτωτης» όπου στα Ελληνικά πράγματι αποτελεί διδακτικό εμπόδιο αφού η λέξη παραπέμπει στην μη σύμπτωση, άρα αποκλείεται να υπάρχουν κοινά σημεία συνάρτησης και ασύμπτωτης, πράγμα που όπως δείξαμε δεν συμβαίνει. Στον Αγγλόφωνο μαθητή, ο ίδιος όρος είναι «asymptote» ο οποίος ως Ελληνικός , ετυμολογικώς , δεν του λέει απολύτως τίποτα , άρα δεν αποτελεί ιδίου βαθμού διδακτικό εμπόδιο γι αυτόν (ένα μέρος του εμποδίου δεν είναι γλωσσικό)

Άλλο παράδειγμα είναι η έννοια της λέξης «συνεχής», όπου στα Ελληνικά (αλλά και σε άλλες γλώσσες) είναι συνυφασμένη με την έννοια της συνεκτικότητας (δηλ. του «μονοκόμματου») Επομένως, το γιατί οι ακολουθίες είναι «συνεχείς συναρτήσεις», είναι το πρώτο γνωστικό εμπόδιο που θα αντιμετωπίσουν στο πρώτο έτος σπουδών τους στα ανώτερα Μαθηματικά, αφού η έννοια της συνέχειας στο Λύκειο ,βάσει αναλυτικού προγράμματος σπουδών, ορίζεται μόνο για συναρτήσεις με πεδίο ορισμού διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Κάποιες φορές ,ορισμένοι μαθητές, δεν αντιλαμβάνονται τις ακολουθίες ως συναρτήσεις, πιθανώς και λόγω διαφορετικού συμβολισμού. Γι΄ αυτούς τους μαθητές, είναι ακόμα πιο δύσκολο να αντιληφθούν τις ακολουθίες ως συνεχείς συναρτήσεις, ιδίως, όταν υπάρχει η πλάνη ότι «οι συνεχείς συναρτήσεις σχεδιάζονται με μονοκονδυλιά στο πεδίο ορισμού τους» Όταν γίνει επίκληση του αντιπαραδείγματος ότι και μια πολυωνυμική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ¡ δεν μπορεί να σχεδιαστεί με μονοκονδυλιά λόγω απειρίας του μήκους της, το γνωστικό εμπόδιο δεν αίρεται, και γίνεται μια αναδιατύπωση του τύπου «κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού σύνολο πεπερασμένου μήκους (:=μέτρου) γράφεται με μονοκονδυλιά») Αν εδώ παρατεθεί το αντιπαράδειγμα (:=αντιπαρατεθεί το παράδειγμα) της

$f:[-1,0)\cup(0,1]\to \mathbb{R}\ \ \mu\varepsilon\ \ f(x)=\frac{1}{x}$ με μ([-1,+1] −{0})=2 όπου η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της , όμως στο 0 παρουσιάζει «άπειρο πήδημα» και άρα δεν μπορεί να γραφεί με μονοκονδυλιά, **πάλι δεν αίρεται το εμπόδιο**, αφού συνηθέστατα έχω και νέα αναδιατύπωση ότι «κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα, γράφεται με μονοκονδυλιά!» Και πάλι όμως, δεν είναι ικανοποιητικά τα πράγματα, αφού η εξωμαθηματική έννοια της «μονοκονδυλιάς» παραπέμπει μεν σε συνεκτική γραμμή , αλλά μπορεί να έχει άπειρο μήκος (μη σχεδιάσιμη από άνθρωπο ή Η/Υ) ή μπορεί να έχει μεν πεπερασμένο μήκος, αλλά να παρουσιάζει άπειρη ταλάντωση (άρα πάλι δεν μπορεί να σχεδιαστεί ικανοποιητικά από άνθρωπο ή Η/Υ) Η δοξασία της «μονοκονδυλιάς» σε κλειστό διάστημα , παραμένει ισχυρή και αίρεται μόνο με παράδειγμα συνάρτησης με άπειρα ακρότατα σε κλειστό διάστημα , όπως αυτή στο σχήμα 1 , όπου φυσικά δεν ασχολούμαστε με απόδειξη και το παράδειγμα γίνεται αντιληπτό διαισθητικά. Η ανακρίβεια της «μονοκονδυλιάς» για συνεχή f σε κλειστό διάστημα, ίσως είχε το ελαφρυντικό της εξωμαθηματικής έκφρασης, αλλά και η έκφραση «μονοκόμματη γραμμή» είναι κι αυτή εξωμαθηματική , όμως ακριβέστερη και προσεγγίζει κάπως ικανοποιητικότερα την έννοια της **συνεκτικού γραφήματος** από την «μονοκονδυλιά» Από την άλλη όμως, υπάρχει συνάρτηση όπως η $f:[0,1]\to R\ \ \mu\varepsilon\ \ f(x)=\left\{\begin{matrix}\sin\frac{1}{x} & \alpha\nu\ \ x\neq 0\\ 0 & \alpha\nu\ \ x=0\end{matrix}\right\}$, που δεν είναι συνεχής στο 0 ,αλλά έχει συνεκτικό γράφημα , πράγμα που υποδεικνύει ότι η χρήση εξωμαθηματικών εκφράσεων πρέπει να γίνεται με **εξαιρετικά μεγάλη φειδώ** και μόνο όταν γνωρίζουμε απολύτως σφαιρικά ένα θέμα .

Διαπιστώσεις προτάσεις: Η έννοια του αντιπαραδείγματος ως αποδεικτικού μέσου σε λανθασμένες γενικεύσεις, είναι μια **διεπιστημονική έννοια** που εφαρμόζεται σε όλες τις φυσικές και κοινωνικές επιστήμες, στην Λογική και στην Φιλοσοφία , ουσιαστικά σε κάθε τομέα του επιστητού. Στην Επιστημολογία και μάλιστα στο ρεύμα της **διαψευσεοκρατίας,** όπου επιστημονικό χαρακτηρίζεται το **διαψεύσιμο** και ότι η επιστήμη προχωρά με δοκιμές και σφάλματα, το αντιπαράδειγμα κατέχει κεντρική θέση. Αυτή η διαπίστωση , καθιστά αδήριτη ανάγκη την εννοιολογική εισαγωγή του αντιπαραδείγματος στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση ως εργαλείου ανταπόδειξης σε λανθασμένες εικασίες, ισχυρισμούς και γενικεύσεις είτε

αφορούν τα μαθηματικά είτε όχι. Κατά την γνώμη μας, τα σχολικά βιβλία **όλων των βαθμίδων**, θα πρέπει να εμπλουτιστούν και με αντιπαραδείγματα , να τα ονοματίσουν ως τέτοια και να αναδειχθεί η αξία τους ως ανταποδεικτικών μέσων σε προτάσεις του τύπου «όλα τα στοιχεία χ του συνόλου Α έχουν την ιδιότητα Β» ως ανακάλυψη ενός $y \in A$ που δεν έχει την ιδιότητα Β. Πιθανόν στις μικρές βαθμίδες της εκπαίδευσης θα πρέπει να μπει μόνο στο βιβλίο του διδάσκοντα και να υπάρξει μια κλιμάκωση.
Το σημαντικό είναι , ότι ακόμα και η ύπαρξη **ενός και μόνου αξιόλογου παραδείγματος στο διδακτικό υλικό, μπορεί να υποψιάσει και να εμπνεύσει πολλαπλώς έναν μαθητή.** Για παράδειγμα η εισαγωγή της «νιφάδας του Koch» σε μια άσκηση του βιβλίου της Β΄ Λυκείου, υπήρξε εξόχως σημαντική , καθώς μυεί τον μαθητή στην ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων με άπειρη περίμετρο και πεπερασμένο εμβαδόν.

Επομένως, η εισαγωγή στα διδακτικά βιβλία των μαθηματικών , ορισμένων επί πλέον ευάριθμων παραδειγμάτων, ελεγμένων και αξιολογημένων επιστημονικώς και διδακτικώς ,διευρύνει το γνωστικό πεδίο των μαθητών διευκρινίζει δυσδιάκριτες πτυχές των εννοιών και αίρει μέρος τουλάχιστον της ισχύος σε συγκεκριμένα διδακτικά εμπόδια. Παράλληλα, η πληρότητα κάλυψης των εννοιών και των προτάσεων του βιβλίου με παραδείγματα και αντιπαραδείγματα , μπορεί να αποτελεί ένα βασικό κριτήριο αξιολόγησής του.

Βιβλιογραφικές και διαδικτυακές αναφορές:

Chalmers A. «Τί είναι αυτό που λέμε Επιστήμη;» Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης Ηράκλειο 2001 (σελ.57-118)

Γαγάτσης Α.«Διδακτική των Μαθηματικών» Θεωρία –Έρευνα , Θεσσαλονίκη 1995 (σελ.239-258)

Κολέζα Ε. «Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών» Αθήνα 2000 (σελ.53-62)

Πλατάρος Ι.:«Η Διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού μέσω Αντιπαραδειγμάτων» διπλωματική εργασία στο ΜΠΕ «Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών» του Μαθ/κού Τμήματος του Παν. Αθηνών -2004
Διατίθεται σε: www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_plataros.pdf

Πλατάρος Ι.:«Διδακτικά εμπόδια στην έννοια της ασύμπτωτης συνάρτησης» εργασία. Διατίθεται:briefcase.pathfinder.gr/download/557157

Σπύρου Π. - Γαγάτσης Α. «Συνάρτηση: Επιστημολογική διάσταση και Διδακτική μεταφορά της»
διατίθεται: http://www.math.uoa.gr/me/faculty/spirou/Spyrou%204.pdf

Summary: The examples and the counterexamples play important role in the teaching of mathematic concepts, and they can completely cover them didactically. At the same time, the use of selected examples and counterexamples, can decrease important part of force in concretely instructive obstacles that are presented at the teaching, while the plenitude of covering of concepts , can be also used as criterion of evaluation of corresponding instructive handbooks.